دانشگاه تهران
دانشکدهٔ علوم، گروهِ ریاضی

پوشش‌ها و روکش‌ها در جبرِ جابه‌جایی

پایان‌نامهٔ کارشناسیِ ارشد

نگارشِ

کاوه لاجوردی

استادِ راهنما

دکتر سیامک یاسمی

۱۳۷۶

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره **کارشناسی ارشد ریاضی محض** **آقای کاوه لاجوردی** تحت عنوان :

پوششها و روکشها در جبر جابجائی

در تاریخ ۲ /۱۰ /۷۶ در محل **دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید.

هیأت داوران براساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات، **پایان نامه** ایشان را برای دریافت **درجه کارشناسی ارشد در** رشته ریاضی محض معادل با ۶/ واحد با نمره نوزده تمام با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیامک یاسمی	استادیار	تهران	
۲ - استاد مشاور	دکترزارع نهندی	استاد		
۳- استاد داور	دکتر محمد رضا درفشه	استاد		

سرپرست تحصیلات تکمیلی گروه	مدیر گروه	سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده
رحیم زارع نهندی	محمد رضا درفشه	رسول اخروی

۱۳۵۳۹

پیشگفتار

بدنهٔ اصلیِ این رساله متشکل است از سه حکمِ مهم (با عنوانِ «قضیه»)، به اضافهٔ تعدادی احکامِ با اهمیتِ کمتر که برای اثباتِ این قضایا لازم‌اند. شمارهٔ قضیه‌ها مستقل از فصلها و به این ترتیب است: قضیهٔ ۱: پس از گزارهٔ ۱.۴′؛ قضیهٔ ۲: پس از گزارهٔ ۳.۴؛ قضیهٔ ۳: پایانِ فصلِ چهارم.

من سپاسگزارِ استادِ راهنمایم آقای دکتر سیامک یاسمی هستم که علاوه بر اینکه در انتخابِ هدف و روشِ کار سلیقهٔ خود را بر من تحمیل نکرد، خودْ در بسیاری موارد با دانش و بصیرتش یاریم کرد. از حوصلهٔ فراوانِ آقای کامران دیوانی‌آذر نیز ممنونم که عملاً به من نشان داد چگونه باید برای فهمِ مطالبِ دشوار کوشید. نیز سپاسگزارِ خانمِ مانیلا حاج‌سلیمی هستم که با کارِ دقیق و کاملاً حرفه‌ایِ حروفچینیِ خودْ شکلِ ظاهریِ رساله را به همان آراستگیِ مطلوبِ من در آورد. هدفْ عرضهٔ کاری بوده است که ــبه‌لحاظِ محتوا و شکلــ نتوان به تمسخر «دانشجویی» نامیدش؛ تعیینِ اینکه میزانِ توفیق چقدر بوده با من نیست: من در حدِ توانم کوشیده‌ام، و اینکه به ظرافتهای به‌کاررفته توجه شده باشد یا نه و یا توجه بشود یا نه (که امیدوارم بشود) چندان اهمیتی ندارد.

در موردِ مقولهٔ «پایان‌نامهٔ کارشناسیِ ارشد» حرفهایی هست که برای مجالی دیگر می‌مانَد؛ عجالةً این رساله را پیشکش می‌کنم به استادانی که «پایان‌نامه» را از ابتذالِ کنونی خواهند رهاند، و به دانشجویانی که پایان‌نامه‌های بهتری خواهند نوشت. و الحمد للّه اولاً و آخراً.

آغازِ زمستانِ ۱۳۷۶،

کاوه لاجوردی.

فهرستِ مطالب

نمادها و پیش‌نیازها

در سراسرِ متن اگر به اصطلاح فنّیِ ناآشنایی برخوردید که در واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار هم پیدا نشد، به واژه‌نامهٔ پایانِ رساله مراجعه کنید.

نمادِ '$\subset$' را برای شمولِ اکید به‌کار می‌بریم؛ پس '$A \subset B$' یعنی $A \subseteq B$ و $A \neq B$. $A\backslash B$ تفاضلِ مجموعه‌های A و B است، یعنی مجموعهٔ آن اعضایی از A که عضوِ B نیستند. در اثباتِ قضیهٔ ۱ از اعدادِ ترتیبی استفاده شده است؛ مطالبِ لازم برای درکِ این اثبات را می‌توان در هر کتابِ قابلِ قبولِ نگرهٔ مجموعه‌ها و نیز در [Eklof, Mekler] یافت.

اصطلاحاتِ و نمادهای جبریِ ما عمدتاً مطابقِ [Rotman] است. همه‌جا مراد از «حلقه» حلقهٔ جابه‌جایی و یکدار است. حلقه‌ها را معمولاً با 'R' نشان می‌دهیم، و در بسیاری از موارد ــ اگر بیمِ ابهام نرود ــ از حلقه به‌صراحت نام نمی‌بریم و مثلاً به‌جای 'Hom_R' و '$\otimes_R$' می‌نویسیم 'Hom' و '$\otimes$'. از حروفِ آلمانی ($\mathfrak{p}$، $\mathfrak{q}$، ...) برای نامیدنِ ایده‌آلهای اول استفاده می‌کنیم. $\mathrm{Spec}(R)$ مجموعهٔ همهٔ ایده‌آلهای اولِ R است.

«مدول» همه‌جا به معنای ($R-$)مدولِ چپِ یکانی است. تسامحاً گاه مدولهای یکریخت را نه صرفاً به لحاظِ جبری، که از نظرِ نگرهٔ مجموعه‌ها نیز یکی می‌گیریم. باز هم با تسامح، هم مدولِ صفر و هم عضوِ صفرِ هر مدول را با '0' نشان می‌دهیم. ${}_R\mathfrak{M}$ ردهٔ همهٔ Rـمدولهاست. در بعضی موارد به‌جای واژهٔ «همریختی» از «نگاشت» استفاده می‌کنیم، و در بسیاری مواردْ '$\varphi : M \to N$' یعنی $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, N)$. '$\leq$' نمادِ رابطهٔ زیرمدولْ بودن است. پوششِ انژکتیوِ M را با '$\mathrm{E}(M)$' نشان می‌دهیم. منظور از حلقهٔ زمینه‌ی $M \in {}_R\mathfrak{M}$، همان R است.

اگر هر M_j، $j \in J$، یک Rـمدول باشد، آنگاه $\Pi_{j\in J} M_j$، حاصل‌ضربِ دکارتیِ M_jها (که متشکل است از همهٔ توابعِ fای با دامنهٔ J که $f(j) \in M_j$)، با ضربِ اسکالرِ نقطه‌ای و جمعِ نقطه‌ای یک Rـمدول است. گاه

عضوِ $x \in \Pi_{j\in J}M_j$ را به‌صورتِ ‘$\{x_j\}_{j\in J}$’ می‌نویسیم. اگر $x \in \Pi M_j$، $x(j)$ (یا همان x_j) را مؤلفهٔ jاُم x می‌نامیم. به ازای هر $j \in J$، نگاشتِ افکنشِ $\rho_j : \Pi M_j \to M_j$ به هر x، $x(j)$ را نسبت می‌دهد؛ مقدارِ نگاشتِ $\lambda_j : M_j \to \Pi M_j$ در x_j، تابعی است با مقدارِ x_j در j و مقدارِ صفر در هر جای دیگر. $\oplus_{j\in J}M_j$ زیرمدولی از $\Pi_{j\in J}M_j$ است متشکل از همهٔ اعضایی از مدولِ اخیر که فقط در تعدادی متناهی عضوِ J غیرصفرند. M^J و $M^{(J)}$ به‌ترتیب به معنای $\Pi_{j\in J}M_j$ و $\oplus_{j\in J}M_j$ هستند که در آنها هر M_j همان M است. اگر $M = \oplus_{j\leq n}M_j$، می‌نویسیم ‘$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$’. اگر $M = N \oplus P$، می‌گوییم که P یک جمع‌وندِ مستقیمِ M است.

به ازای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ و هر $M \in {}_R\mathfrak{M}$، $M_\mathfrak{p}$ همان $S^{-1}M$ (موضعی‌شدهٔ M نسبت به S) است، که در اینجا $S = R\backslash\mathfrak{p}$. [$M$ را گاه موضعی‌شدهٔ M در $\mathfrak{p}$ می‌خوانیم.] $R_\mathfrak{p}$ حلقه‌ای است موضعی با (یگانه) ایده‌آلِ ماکزیمالِ $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. $k(\mathfrak{p})$ موضعی‌شدهٔ $R/\mathfrak{p}$ در $\mathfrak{p}$ است، و می‌توان دید که با $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ یکریخت است. به‌علاوه، به‌عنوانِ $R_\mathfrak{p}$ـمدول (و به‌عنوانِ Rـمدول)، پوششِ انژکتیوِ $k(\mathfrak{p})$ نسبت به حلقهٔ $R_\mathfrak{p}$، با $\mathrm{E}(R/\mathfrak{p})$ یکریخت است.

منظور از زنجیری به طولِ n از ایده‌آلهای اولِ R، دنباله‌ای مثلِ $\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ است. بعدِ کرولِ R، $\dim R$، کوچکترین کرانِ بالای طولهای زنجیرهای ایده‌آلهای اولِ R است (اگر این کرانْ متناهی نباشد می‌گوییم که R بعدِ کرولِ نامتناهی دارد). ارتفاعِ $\mathfrak{p}$، $\mathrm{ht}\mathfrak{p}$، یعنی بعدِ کرولِ $R_\mathfrak{p}$.

در این رساله هر جا از «کامل‌شده»ی یک مدولِ M سخن می‌رود، حلقهٔ زمینه یک حلقهٔ موضعیِ $(R, \mathfrak{m})$ است و توپولوژیِ وضع‌شده روی M توپولوژیِ $\mathfrak{m}$ای است، یعنی M یک Rـمدولِ توپولوژیک است به این صورت که $V \subseteq M$ در M باز است اگر به ازای هر $x \in M$، یک $n \geq 0$ باشد که $x + \mathfrak{m}^n M \subseteq V$. کامل‌شدهٔ M را با ‘$\hat{M}$’ نشان می‌دهیم. در بارهٔ فرآیندِ کامل‌سازیْ مراجعه به [Atiyah, Macdonald] و [Jacobson] و [Sharpe, Vámos] بسیار مفید است. برای ما نحوهٔ انجامِ این فرآیندِ مهمْ مهم نیست؛ فقط کافی است بدانیم که $\hat{M}$ یک مدولِ توپولوژیکِ هاؤسدرف است، و اینکه (نگاه کنید به فرعِ 1 بر قضیهٔ 5.14 در [Sharpe, Vámos]) $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{E}(R/\mathfrak{p}), \mathrm{E}(R/\mathfrak{p}))$ کامل‌شدهٔ $R_\mathfrak{p}$ است.

مقدمه

بسم الله الرحمن الرحیم. مدولهای آزادْ ساختارِ ساده‌ای دارند: $A \in {}_R\mathfrak{M}$ آزاد است اگر و تنها اگر به شکلِ $R^{(X)}$ باشد. مفهومِ پروژکتیو بودنْ تعمیمِ ساده‌ای از مفهومِ آزادْ بودن است: P پروژکتیو است اگر تابعگونِ $\mathrm{Hom}(P,-)$ دقیق باشد. مدولهای پروژکتیو دقیقاً همان جمعوندهای مستقیمِ مدولهای آزادند.

برخلافِ آنچه ممکن است «طبیعی» به‌نظر آید، مدولهای انژکتیو پیش از مدولهای پروژکتیو تعریف شده‌اند.[۱] E انژکتیو است اگر و تنها اگر $\mathrm{Hom}(-,E)$ دقیق باشد. در حالتِ کلّی، ساختارِ مدولهای انژکتیو بغایت پیچیده است.

هر مدولْ تصویرِ همریختیِ یک مدولِ پروژکتیو است و همهٔ مدولها توسیعِ انژکتیو دارند. از میانِ این تصاویرِ وارون و توسیعها، آنهایی بیشتر موردِ توجه‌اند که تقریبِ مناسبتری به‌دست دهند؛ بدین‌گونه است که Pی پروژکتیو را یک روکشِ پروژکتیوِ M گوییم اگر یک نگاشتِ پوشای $P \to M$ باشد که هسته‌اش در P زائد («کوچک») باشد، و Eی انژکتیو را یک پوششِ انژکتیوِ M گوییم اگر M یک زیرمدولِ اساسی («بزرگ») از E باشد. روکشِ پروژکتیوِ هر مدول و پوششِ انژکتیوِ هر مدولْ در صورتِ وجودْ منحصر به فردند.

مدولهای پروژکتیوْ ساختارِ ساده‌ای دارند. در مقابل، قضیه‌ای در نگرهٔ مجموعه‌ها حکم می‌کند به اینکه (حتی در موردِ گروههای آبلی،) روشِ کلّی‌ای وجود ندارد که شکلِ اعضای $\mathrm{E}(M)$ را با معلوم بودنِ شکلِ اعضای M معلوم کند.[۲] با این حال، حدودِ پنجاه سال است که ثابت شده است هر مدولْ پوششِ انژکتیو دارد، و مثالهای ساده‌ای (مثلاً گروهِ آبلیِ $\mathbb{Z}_2$) هست که نشان می‌دهد مدولهایی هستند که روکشِ پروژکتیو ندارند. قضیهٔ Pی [Bass 1960] حلقه‌هایی (حلقه‌های

۱) نگاه کنید به [Jacobson]،ص.157. واضعِ این مفهوم R. Baer است.

۲) برای بیانِ دقیق و اثباتِ این حکم نگاه کنید به

Wilfrid Hodges, Constructing Pure-injective Hulls, *The Journal of Symbolic Logic*, **45** (1980), 544-548.

بی‌کاست) را مشخص می‌کند که هر مدولِ آنها روکشِ پروژکتیو دارد.

برخی جبردانان بر آن‌اند که خاصیتِ پروژکتیو بودنْ دوگانِ مناسبی برای خاصیتِ انژکتیو بودنْ نیست،[۱] و دوگانِ مناسبْ برای انژکتیو بودن را یکدست بودن می‌دانند. بجاست سعی کنیم از «روکشِ یکدست» سخن بگوییم، و معقول است حدس بزنیم که هر مدولْ روکشِ یکدست دارد. اما پیش از تعریفْ توجه کنید که به محضِ تعریفِ این مفهوم، ردهٔ شناخته‌شده‌ای از حلقه‌های R حاصل می‌شود که هر عضوِ ${}_R\mathfrak{M}$ روکشِ یکدست دارد، زیرا شرطی لازم و کافی برای بی‌کاست بودنِ حلقه آن است که هر مدولِ یکدستْ پروژکتیو باشد ([Anderson, Fuller], 28.4)؛ پس در این حلقه‌ها، ردهٔ مدولهای یکدستْ همان ردهٔ مدولهای پروژکتیو است و لذا طبقِ قضیهٔ P، با هر تعریفِ معقولی از «روکش»، همهٔ مدولهای این حلقه‌ها روکشِ یکدست دارند.

فرض کنیم $\mathcal{A}$ رده‌ای از Rـمدولها باشد که تحتِ یکریختی و جمع‌وندِ مستقیم و جمعِ مستقیم متناهیْ بسته باشد. [بسته بودنِ $\mathcal{A}$ تحتِ یکریختیْ تضمین‌کنندهٔ آن است که اعضای $\mathcal{A}$ تا حدِ قابلِ قبولی با خواص «جبری» انتخاب شده‌اند؛ دو موردِ دیگرِ بسته بودنْ ناظر به برخی ملاحظاتِ فنّیِ بدیهی است.] $A \in \mathcal{A}$ را به همراهِ $\varphi : A \to M$ یک $\mathcal{A}$ـپیش‌روکشِ Rـمدولِ M گوییم اگر به ازای هر $A' \in \mathcal{A}$، $\operatorname{Hom}(A', A) \xrightarrow{\varphi_*} \operatorname{Hom}(A', M)$ پوشا باشد؛ اگر، به علاوه، هر $f : A \to A$ که در $\varphi f = f$ صدق کند خودریختی باشد، (A, φ) را یک $\mathcal{A}$ـروکشِ M گوییم. متناظراً، (B, ψ)، که $B \in \mathcal{A}$ و $\psi : M \to B$، یک $\mathcal{A}$ـپیش‌پوششِ M است اگر نگاشتِ $\operatorname{Hom}(B, B') \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(M, B')$ به ازای هر $B' \in \mathcal{A}$ پوشا باشد، و یک $\mathcal{A}$ـپوششِ M است اگر اضافه بر این، هر $g : B \to B$ که $g\psi = \psi$، خودریختی باشد. به‌وضوح پوشش‌ها و روکش‌ها، در صورتِ وجود، منحصر به فردند. دیده می‌شود (گزاره‌های ۱.۱ و ۱.۲) که با اختیارِ رده‌های مدولهای پروژکتیو یا انژکتیو به‌جای $\mathcal{A}$، مفاهیمِ استانده‌ٔ روکشِ پروژکتیو و پوششِ انژکتیو حاصل می‌شود. اگر $\mathcal{A}$ ردهٔ مدولهای یکدست باشد، $\mathcal{A}$ـروکشِ M را (در صورتِ وجود) روکشِ یکدستِ M می‌خوانیم. این تقریر از [Enochs 1981] است.

طبقِ قضیهٔ بسیار معروفِ [Matlis 1958]، اگر R نوتری باشد آنگاه هر Rـمدولِ انژکتیوِ E به شکلِ مجموعِ مستقیمی از $\mathrm{E}(R/\mathfrak{p})$هاست. آیا حکمِ مشابهی در موردِ مدولهای یکدست وجود دارد؟ در حالتِ کلّی فعلاً پاسخ منفی است؛ در موردِ مدولهای یکدستِ هم‌تابدار[۲] (که همان روکشهای یکدستِ مدولهای هم‌تابدارند) چنین مشخص‌سازی‌ای وجود

۱) در اینجا با تعریفِ دقیقِ دوگان در نگرهٔ رسته‌ها کاری نداریم و بیشتر به نوعی «تناظر» یا «شباهتِ معکوس» نظر داریم.

۲) M هم‌تابدار است اگر به ازای هر مدولِ یکدستِ F، $\operatorname{Ext}^1(F, M) = 0$. این مفهوم در فصلِ سوم به‌تفصیل بررسی شده است.

دارد؛ این قضیهٔ مهم در [Enochs 1984] ثابت شده است.

با معرفیِ مفهومی جدید، دو دسته پرسش مطرح می‌شود: اول اینکه با به‌کارگیریِ این مفهوم چه اطلاعاتی در بارهٔ مفاهیمِ قبلی حاصل می‌شود، و دوم اینکه تحتِ چه شرایطی مصادیقِ این مفهومِ جدید موجودند. در موضوعِ اول، پیشرفتهای حاصل‌شده به لحاظِ اهمیت و دشواری نسبتاً متنوع‌اند: ثابت شده است ([Enochs 1981]) که R نوتری است اگر و تنها اگر هر $M \in {}_R\mathfrak{M}$ روکشِ انژکتیو داشته باشد (ضمیمهٔ این مقدمه را ببینید)، و اگر هر Rـمدولِ غیرصفر روکشِ انژکتیوِ غیرصفر داشته باشد آنگاه R آرتینی است ([Belshoff, Xu ∞]).

در مرتبه‌ای پیشرفته‌تر، برای Mهایی که تحلیلِ مینیمالِ یکدست داشته باشند[1] اعدادِ $\pi_j(\mathfrak{p}, M)$ای تعریف می‌شوند ([Xu 1995a]) که دوگانِ مناسبی برای اعدادِ بَس، یعنی $\mu_j(\mathfrak{p}, M)$ها، هستند. مثلاً می‌دانیم ([Strooker], 3.3.3) که

$$\mu_j(\mathfrak{p}, M) = \dim_{k(\mathfrak{p})} \operatorname{Ext}^j_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}).$$

در مقابل، در [Enochs, Xu 1997] ثابت شده است که اگر R نوتری باشد و $M \in {}_R\mathfrak{M}$ هم‌تابدار باشد و تحلیلِ مینیمالِ یکدست داشته باشد، آنگاه

$$\pi_j(\mathfrak{p}, M) = \dim_{k(\mathfrak{p})} \operatorname{Tor}_j^{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), \operatorname{Hom}_R(R_\mathfrak{p}, M)).$$

$\pi_j(\mathfrak{p}, m)$ها اطلاعاتی هم در بارهٔ حلقه‌های گُورِنستاین (یعنی حلقه‌های Rای که به ازای هر ایده‌آلِ ماکزیمالِ $\mathfrak{m}$ از R، بعدِ انژکتیوِ حلقهٔ $R_\mathfrak{m}$ متناهی است) به‌دست می‌دهد؛ مثلاً ([Xu 1995a], 3.1) حلقهٔ R گورنستاین است اگر و تنها اگر به ازای هر مدولِ انژکتیوِ E و هر $\mathfrak{p}$ که $j \neq \operatorname{ht}\mathfrak{p}$، $\pi_j(\mathfrak{p}, E) = 0$.

در بارهٔ مسألهٔ وجودِ روکشِ یکدست برای هر مدول هم به برخی نتایج اشاره می‌کنیم. قبلاً گفتیم که طبقِ قضیهٔ Pی بَس، در حلقه‌های بی‌کاستْ همهٔ مدولها روکشِ یکدست دارند. اگر R فون‌نویمان‌ـمنظم باشد، آنگاه هر $M \in {}_R\mathfrak{M}$ روکشِ یکدست دارد زیرا ([Rotman], 4.16) در این حلقه‌ها همهٔ مدولها یکدست‌اند. اگر حلقهٔ زمینه نوتری و با بعدِ کرولِ متناهی باشد، آنگاه همهٔ مدولها روکشِ یکدست دارند ([Xu 1995]). می‌توان مسأله را به‌جای حلقه‌های خاص، در موردِ مدولهای خاص نیز مطرح کرد؛ در [Belshoff *et al.* 1994] ثابت شده است که در حلقه‌های منسجم، همهٔ

۱) در حلقه‌های نوتری با بعدِ کرولِ متناهی، این معادل است با اینکه M روکشِ یکدست داشته باشد ــ‌ر.ک. گزارهٔ 3.5 در [Belshoff *et al.*, 1994].

مدولهای انژکتیوِ خالص و همهٔ مدولهای با بعدِ یکدستِ متناهیْ روکشِ یکدست دارند.

در این رساله، ــطبیعتاًــ به همهٔ این موارد نمی‌پردازیم.

* * *

در فصلِ اولْ تعاریف و خواصِ بنیادیِ پوششها و روکشها عرضه شده است. حکمِ اصلیِ این فصلْ قضیهٔ ۱ است که بنا بر آن، اگر A تحتِ حدِ مستقیمْ بسته باشد آنگاه هر M که Aـپیش‌روکش داشته باشد Aـروکش دارد ــپس، بالاخص، وجودِ پیش‌روکشِ یکدستْ وجودِ روکشِ یکدست را نتیجه می‌دهد.

در متونِ درسیِ استاندهٔ در دسترسِ ما، به مدولهای انژکتیوِ خالصْ بسیار کم توجه شده است. فصلِ کوتاهِ دوم به معرفیِ این مدولها و عرضهٔ نتایجِ موردِ نیاز برای فصلهای بعدی می‌پردازد. اثباتِ وجودِ پوششِ انژکتیوِ خالص برای همهٔ مدولها در اساس حاویِ ایدهٔ تازه‌ای نیست و لذا به‌تفصیل نیامده است.

در فصلِ سوم ابتدا مقدماتی در بابِ مدولهای هم‌تابدار می‌آوریم و سپس به اثباتِ دشوارترین نتیجهٔ این رساله، قضیهٔ ۲، می‌پردازیم. در فصلِ چهارم پس از بیانِ بدونِ اثباتِ قضیه‌ای از [Enochs 1987]، قضیهٔ اصلیِ [Xu 1995] را اثبات می‌کنیم. اثباتِ این قضیه (قضیهٔ ۳) متنِ رساله را به پایان می‌بَرَد.

در تمامیِ رساله کوشیده‌ایم مطالب به شیوه‌ای «طبیعی» و «خودمانی» بیان شوند، و در اثباتها نیز ــتا حدِ امکانــ ابتدا ایده‌های اصلی، و بعد لم‌های فنّی آورده شده است. روی هم رفته، بیشتر کوشیده‌ایم حرف بزنیم تا آنکه فرمول بنویسیم. بلافاصله اضافه می‌کنیم که توجه کرده‌ایم که اولاً اتخاذِ این شیوه به عدول از معیارهای بیانِ دقیقِ ریاضی نینجامد و ثانیاً منجر به لفّاظی نشود. در موردِ دوم، عامدانه و به‌شدت از اثباتِ هرگونه مطلبِ «کلاسیک» یا مطلبی که در کتابهای استاندهٔ درسی آمده باشد پرهیز کرده‌ایم: فرض بر این است که خوانندهٔ این رساله با مطالبِ نُه فصلِ نخستِ [Rotman] آشنایی دارد، و لذا در ارجاعِ او به هر گزاره یا تمرینی در کتابهای در این سطح تردید نکرده‌ایم.

ضمیمه. برای اینکه خواننده‌ای که اطلاعاتش در بارهٔ روکش‌ها و پوشش‌ها را تنها از طریق این رساله به‌دست می‌آورد از نوعِ دیگری از قضایا به کلّی بی‌اطلاع نمانَد، گزارهٔ ذیل را که در [Enochs 1981] آمده اثبات می‌کنیم.

گزاره. *حلقهٔ R نوتری است اگر و تنها اگر هر عضوِ ${}_R\mathfrak{M}$ روکشِ انژکتیو داشته باشد.*

بنابر ۱.۵، اگر R نوتری باشد آنگاه برای اعضای ${}_R\mathfrak{M}$، روکشِ انژکتیو داشتن معادل است با پیش‌روکشِ انژکتیو داشتن؛ بنا بر این اثباتِ این گزاره تحویل می‌شود به اثباتِ

حکم. حلقهٔ R نوتری است اگر و تنها اگر هر عضوِ ${}_R\mathfrak{M}$ پیش‌روکشِ انژکتیو داشته باشد.

اثبات. '$\Rightarrow$': کافی است ([Rotman], 4.10) ثابت کنیم که به ازای هر خانوادهٔ $\{E_j\}_{j\in J}$ از Rـمدولهای انژکتیو، $\oplus_{j\in J} E_j$ انژکتیو است.

$$\begin{tikzcd}
 & E_j \arrow[dl, "\psi_j"'] \arrow[d, "\lambda_j"] \\
E \arrow[r, "\varphi"] & \oplus E_j
\end{tikzcd}$$

(E,φ) را یک پیش‌روکشِ انژکتیوِ $\oplus E_j$ می‌گیریم، و به ازای هر $j\in J$، $\lambda_j : E_j \to \oplus E_j$ و $\rho_j : \oplus E_j \to E_j$ را به ترتیب نگاشتهای متعارفِ «شمول» و افکنش می‌گیریم. چون (E,φ) یک پیش‌روکشِ انژکتیو $\oplus E_j$ است و هر E_j انژکتیو است، به ازای هر j یک نگاشتِ $\psi_j : E_j \to E$ هست که $\varphi\psi_j = \lambda_j$. نگاشتِ $\psi : \oplus E_j \to E$ را با ضابطهٔ $x \mapsto \sum_{j\in J} \psi_j\rho_j(x)$ تعریف می‌کنیم. اگر $x \in \oplus E_j$، آنگاه

$$\varphi(\psi(x)) = \sum \varphi\psi_j\rho_j(x) = \sum \lambda_j\rho_j(x) = x.$$

پس φ یک وارونِ راستِ نگاشتِ (یک به یکِ) ψ است و لذا رشتهٔ دقیقِ

$$0 \to \oplus E_j \underset{\varphi}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} E \to \frac{E}{\mathrm{Im}\psi} \to 0$$

شکافته می‌شود. بنا بر این $\oplus E_j$ یک جمعوندِ مستقیمِ مدولِ انژکتیوِ E، و لذا انژکتیو است.

'$\Leftarrow$': فرض کنیم R نوتری باشد. می‌دانیم (بخشِ پیش‌نیازها را ببینید) که هر Rـمدولِ انژکتیوِ E به شکلِ مجموعِ مستقیمی از مدولهایی به شکلِ $\mathrm{E}(R/\mathfrak{p})$ است، که $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. قرار می‌دهیم $J = \{\mathrm{E}(R/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}$.

فرض کنیم $E, M \in {}_R\mathfrak{M}$، $\varphi \in \mathrm{Hom}(E,M)$، و E انژکتیو باشد. فرض کنیم به ازای هر $F \in J$ و هر $f \in \mathrm{Hom}(F,M)$ نمودارِ (الف) کامل‌شدنی باشد؛ نشان می‌دهیم که در این صورت (E,φ) یک پیش‌روکشِ انژکتیوِ M است.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, "\varphi"] & M \end{tikzcd}$$

(الف)

$$\begin{tikzcd} & F_j \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[d, shift right, "\lambda_j"'] \\ & X \arrow[u, shift right, "p_j"'] \arrow[dl, "\psi"] \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, "\varphi"'] & M \end{tikzcd}$$

(ب)

به نمودارِ (ب) نگاه کنید. اگر $X \in {}_R\mathfrak{M}$ انژکتیو باشد، آنگاه $X = \oplus F_j$، که هر F_j عضوی از J است. [F_jها ممکن است تکرار شوند؛ برای ما مجموعهٔ اندیس در نمایشِ X اهمیتی ندارد.] روشن است که اگر $\psi : X \to E$ با ضابطهٔ $\psi(x) = \sum \psi_j \rho_j(x)$ تعریف شود، آنگاه $\varphi\psi = f$؛ پس اگر هر نمودارِ به شکلِ (الف) با $F \in J$ کامل‌شدنی باشد، آنگاه (E, φ) یک پیش‌روکشِ انژکتیوِ M است. ذیلاً از این مطلب استفاده خواهیم کرد.

فرض کنیم $M \in {}_R\mathfrak{M}$، و فرض کنیم $F \in J$. F^* را برابرِ Rـمدولِ

$$\bigoplus_{\mathrm{Hom}(F,M)} F$$

تعریف می‌کنیم. [چون تعریفِ F^* شاید در نگاهِ نخست نامتعارف به نظر آید کمی دربارهٔ آن توضیح می‌دهیم. $\mathrm{Hom}(F, M)$ متشکل است از همریختی‌های از F به توی M. به ازای هر عضوِ φ از این مجموعه، Rـمدولِ F_φ را برابرِ F تعریف کنید. اکنون $F^* = \oplus_{\varphi\in\mathrm{Hom}(F,M)} F_\varphi$. هر عضوِ F^* یک دنبالهٔ $\{x_\varphi\}_{\varphi\in\mathrm{Hom}(F,M)}$ است که تنها تعدادی متناهی مؤلفهٔ ناصفر دارد.] چون R نوتری است، F^* (که مجموعِ مستقیمی از مدولهای انژکتیو است) انژکتیو است. نگاشتِ $\varphi_{F^*} : F^* \longrightarrow M$ را با ضابطهٔ $\{x_\varphi\} \mapsto \Sigma\varphi(x)$ تعریف می‌کنیم. به‌روشنی φ_{F^*} یک Rـهمریختی است. به‌علاوه، اگر $f \in \mathrm{Hom}(F, M)$ (نمودارِ (الف) را به‌یاد آورید)، آنگاه نگاشتِ «شمول»ـِ $\lambda_f : F \to F^*$ چنان است که به ازای هر $x \in F$،

$$\varphi_{F^*}(\lambda_f(x)) = \varphi_{F^*}(\langle 0, \ldots, x, \ldots, 0\rangle) = f(x).$$

اکنون قرار می‌دهیم $E = \oplus_{F\in J} F^*$، و $\varphi : E \to M$ را $\sum_{F\in J} \varphi_{F^*}\rho_{F^*}$ می‌گیریم. چون R نوتری و هر F^* انژکتیو است، E انژکتیو است. نشان می‌دهیم که به ازای هر $F \in J$، نمودارِ (الف) کامل‌شدنی است. این، اثبات را تمام می‌کند.

اما اثباتِ مطلبِ اخیر ساده است: به نمودارِ زیر نگاه کنید، که در آن $\psi = \lambda_{F^*}\lambda_F$. ■

$$\begin{tikzcd}
 & & F \arrow[dll, "\psi"'] \arrow[dl, "\lambda_f"] \arrow[d, "f"] \\
E = \bigoplus_{F\in X} F^* \arrow[r, shift right, "\rho_{F^*}"'] & F^* \arrow[l, shift right, "\lambda_{F^*}"'] \arrow[r, "\varphi_{F^*}"'] & M
\end{tikzcd}$$

فصلِ اول

پوشش‌ها و روکش‌ها: تعاریف و خواصِ بنیادی

۱. مقدمه بر تعاریف

تعاریفِ سنّتیِ پوششِ انژکتیو و روکشِ پروژکتیو، چنانکه مثلاً در [Rotman] آمده، تعریفهایی است بیان‌شده در نگرهٔ مدولها ـــ مثلاً در این دو تعریف از مفهومِ یک به یک بودن (در تعریفِ پوششِ انژکتیو) و زیرمدول (در تعریفِ روکشِ پروژکتیو) استفاده شده است. هدف از این بخش تقریرِ مجددِ این مفاهیم است با عباراتی قابلِ بیان در نگرهٔ رسته‌ها. با توفیق در این کار، اولاً «طبیعی» بودنِ مفاهیمِ $\mathcal{A}$ـپوشش و $\mathcal{A}$ـروکش نشان داده می‌شود، و ثانیاً (و این مهمتر است) در حالاتِ خاصی که $\mathcal{A}$ ردهٔ مدولهای انژکتیو یا ردهٔ مدولهای پروژکتیو روی حلقهٔ خاصی باشد، سازگاریِ مفاهیمِ جدید با مفاهیمِ سنّتی ثابت می‌شود.

۱.۱. پوششِ انژکتیو

ابتدا تعریفِ متداول را یادآوری می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $E, M \in {}_R\mathfrak{M}$، و فرض می‌کنیم E انژکتیو باشد و $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, E)$. در این صورت (E, φ) را یک پوششِ انژکتیوِ M گوییم اگر

(آ) φ یک به یک باشد؛

(ب) $\varphi(M)$ یک زیرمدولِ اساسیِ E باشد [یعنی اگر $0 \neq N \leq E$، آنگاه $N \cap \varphi(M) \neq 0$].

اکنون $\mathcal{E}$ را ردهٔ Rـمدولهای انژکتیو می‌گیریم و تقریرِ دیگری از تعریفِ بالا به‌دست می‌دهیم.

گزارهٔ ۱.۱. *فرض‌کنیم* $M \in {}_R\mathfrak{M}$، $E \in \mathcal{E}$، و $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, E)$. *در این صورت* (E, φ) *یک پوششِ انژکتیوِ* M *است اگر و تنها اگر*

(۱) به ازای هر $E' \in \mathcal{E}$ و هر $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, E')$، یک همریختیِ $f : E \to E'$ هست که نمودارِ زیر را کامل می‌کند؛

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & E \arrow[d, "f"] \\ & E' \end{tikzcd}$$

(۲) هر $f : E \to E$ که نمودارِ زیر را کامل کند خودریختی است.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & E \arrow[d, "f"] \\ & E \end{tikzcd}$$

اثبات. آنچه ما ثابت می‌کنیم حکمی است قویتر از مدعای گزاره، یعنی نشان می‌دهیم که تحتِ مفروضاتِ بیان‌شده، (۱) معادل است با (آ)، و (۲) معادل است با (ب).

'(آ) $\Rightarrow$ (۱)': E' را یک مدولِ انژکتیوِ شاملِ M، و $\psi : M \to E'$ را نگاشتِ شمول می‌گیریم. (۱) وجودِ یک $f : E \to E'$ را نتیجه می‌دهد که $f\varphi = \psi$. اکنون اگر φ یک به یک نباشد، یک $0 \neq x \in M$ هست که $\varphi(x) = 0$، و لذا $x = \psi(x) = f(\varphi(x)) = 0 \neq x$، که تناقض است.

'(۱) $\Rightarrow$ (آ)': اگر φ یک به یک باشد، (۱) از تعریفِ انژکتیو بودن نتیجه می‌شود.

'(ب) $\Rightarrow$ (۲)': اگر نه، یک عضوِ غیرصفرِ $x \in M$ وجود دارد که $\langle x \rangle \cap \varphi(M) = 0$. همریختیِ $\psi : \langle x \rangle + \varphi(M) \to E$ را با $rx + \varphi(m) \mapsto \varphi(m)$ تعریف می‌کنیم. [ψ خوش‌تعریف است زیرا $\langle x \rangle + \varphi(M) \cong \langle x \rangle \oplus \varphi(M)$.] نمودارِ